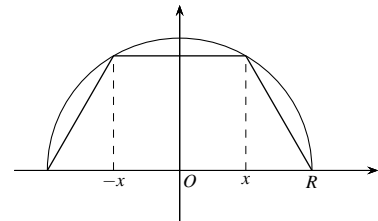


Grado en Biotecnología

Análisis Matemático – Examen Convocatoria Ordinaria – Enero 2021

1. Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. En cada etapa la cuarta parte de jóvenes llegan a adultos. De una etapa a otra los adultos mueren. El número medio de crías de cada joven es de $1/2$ y el de cada adulto es de 2. Sea $\mathbf{X}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}$ el vector que nos da la población de jóvenes y adultos en la etapa n .
- a) Comprueba que la dinámica de la población responde al modelo $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{M}\mathbf{X}(n)$ donde \mathbf{M} es una matriz de Leslie.
- b) Diagonaliza la matriz \mathbf{M} y calcula \mathbf{M}^n (debes expresar todos los elementos de \mathbf{M}^n en función de n de la forma más simplificada posible).
- c) Calcula la matriz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}^n$ de dos formas distintas: una usando el resultado anterior y otra usando un resultado de teoría que permite calcular dicho límite sin necesidad de calcular \mathbf{M}^n .
- d) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.
- e) Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}(n)$ sabiendo que $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$.

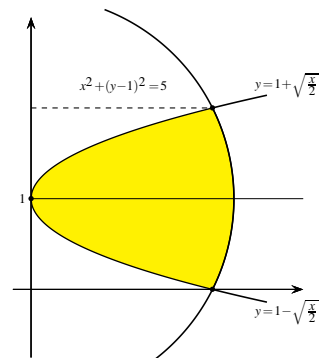
2. Calcula las dimensiones del trapecio isósceles de área máxima inscrito en la semicircunferencia superior centrada en el origen de radio R . Justifica que el resultado obtenido es un máximo absoluto.



3. Sea R la región del plano limitada por las curvas

$$x^2 + (y-1)^2 = 5, \quad (y-1)^2 = \frac{x}{2}$$

- a) Calcula el área de R .
- b) Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene girando R alrededor del eje de ordenadas y alrededor de la recta $y = 1$.



4. a) Clasifica los puntos críticos del campo escalar $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.
- b) Calcula el máximo y el mínimo absolutos de dicho campo escalar en el conjunto:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}.$$